Réponses du devoir surveillé de Mathématiques n°1

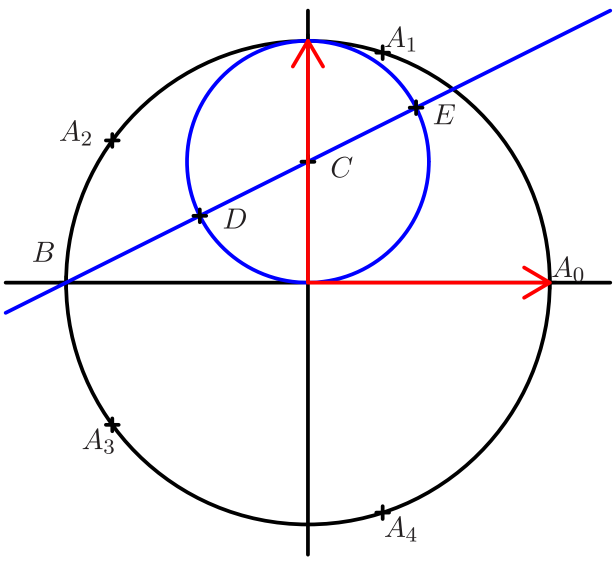
Exercice 1

1. Droite d'équation réduite $y = x - 1$.
2. Cercle de centre $\Omega(\frac{1}{2})$ et de rayon $\frac{1}{2}$.
3. Points d'affixes 0, $e^{\pm\frac{i\pi}{4}}$ et $e^{\pm\frac{3i\pi}{4}}$.

Exercice 2

1. (a) $z' = z + 1 + 2i$.
   (b) $z' = -iz + 1 + 3i$.
2. $z'' = -iz + 3 + 2i$ soit $(z'' - \frac{5-i}{2}) = -i(z - \frac{5-i}{2})$, la transformation $r \circ t$ est une rotation d'angle $-\frac{\pi}{2}$ et de centre le point d'affixe $\frac{5-i}{2}$.
3. $z'' = -iz + 2 + 5i$ soit $(z'' - \frac{7+3i}{2}) = -i(z - \frac{7+3i}{2})$, la transformation $t \circ r$ est une rotation d'angle $-\frac{\pi}{2}$ et de centre le point d'affixe $\frac{7+3i}{2}$.

Exercice 3



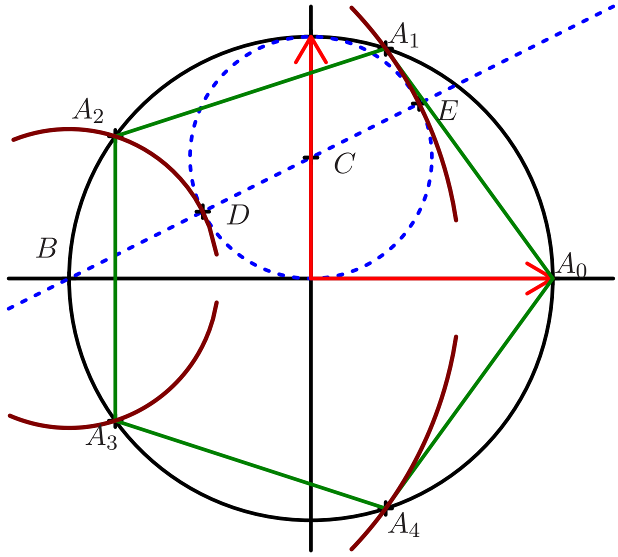
1.

2. (a) $y = \dfrac{x+1}{2}$ d'où $\dfrac{z - \overline{z}}{2i} = \dfrac{\frac{z+\overline{z}}{2} + 1}{2}$.
   (b) $\left|z - \dfrac{i}{2}\right| = \dfrac{1}{2}$ d'où $(z - \frac{i}{2})(\overline{z} + \frac{i}{2}) = \frac{1}{4}$.
   (c) $2iz(1-2i)\overline{z} + (1-2i)\overline{z} - (1-2i)z = 0$ d'où $2iz[-(1+2i)z-2] + [-(1+2i)z-2] - (1-2i)z = 0$.
   (d) $z_D = -\frac{\sqrt{5}}{5} + (1 - \frac{\sqrt{5}}{5})\frac{i}{2}$ et $z_E = \frac{\sqrt{5}}{5} + (1 + \frac{\sqrt{5}}{5})\frac{i}{2}$.

3. (a) $BD^2 = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$ et $BE^2 = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$.

   (b) $BA_1{}^2 = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$ et $BA_2{}^2 = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$.

   (c)



Exercice 4

1. (a) $P_0 = 1$, $P_1 = X$ et $P_2 = 2X^2 - 1$.

   (b) $Q_0 = 0$, $Q_1 = 1$ et $Q_2 = 2X$.

2. (a) $\cos(n\theta + \theta) = \cos(n\theta)\cos\theta - \sin(n\theta)\sin\theta = \cos\theta\cos(n\theta) - (\sin\theta)^2 \dfrac{\sin(n\theta)}{\sin\theta}$

   (b) $Q_{n+1} = P_n + XQ_n$.

   (c) $P_3 = 4X^3 - 3X$, $Q_3 = 4X^2 - 1$, $P_4 = 8X^4 - 8X^2 + 1$ et $Q_4 = 8X^3 - 4X$.

3. (a) $P_{n+2} = XP_{n+1} + (X^2-1)Q_{n+1}$
   $P_{n+2} = XP_{n+1} + (X^2-1)(P_n + XQ_n)$
   $P_{n+2} = XP_{n+1} + (X^2-1)(P_n + X\frac{P_{n+1}-XP_n}{X^2-1})$.

   (b) $Q_{n+2} = 2XQ_{n+1} - Q_n$.

4. On a $\dfrac{\mathrm{d}P_n}{\mathrm{d}\theta} = \dfrac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}\theta}\dfrac{\mathrm{d}P_n}{\mathrm{d}X}$ soit $-n\sin(n\theta) = (-sin\theta)\dfrac{\mathrm{d}P_n}{\mathrm{d}X}$, d'où $n\dfrac{\sin(n\theta)}{\sin\theta} = \dfrac{\mathrm{d}P_n}{\mathrm{d}X}$ et donc $\dfrac{\mathrm{d}P_n}{\mathrm{d}X} = nQ_n$.